2 $\sqrt{2}$ není racionální číslo

$\sqrt{2}$ je nepochybně číslo, které má dobrý význam. Právě tak dlouhou hranu má čtverec, jehož obsah je roven dvěma plošným jednotkám. Z Pythagorovy věty vyplývá, že právě takovou délku má přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délky jedna. Již staří Řekové na základě toho uměli $\sqrt{2}$ geometricky sestrojit. A titíž si také nejen položili otázku, zda lze $\sqrt{2}$ zapsat jako zlomek, ale zároveň nalezli i odpověď. Ke svému velkému překvapení zjistili, že to není možné.

Algebraický důkaz

Budeme dokazovat sporem. Na začátku tedy předpokládejme, že $\sqrt{2}$ lze zapsat jako zlomek p/q v základním tvaru. Je zřejmé[1], že $1 < \sqrt{2} < 2$. Pro kladný zlomek v základním tvaru jsou p i q nesoudělná přirozená čísla. Umocněním výchozího vztahu dostaneme

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{a po úpravě} \quad 2q^2 = p^2.$$

To znamená, že čtverec čísla p je sudé číslo, což je možné jen tehdy, pokud samotné p je sudé. Každé sudé číslo lze zapsat jako $2m$ pro nějaké přirozené m. Dosazením máme

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad \text{a po vydělení 2} \quad q^2 = 2m^2.$$

Na základě stejné úvahy nyní vidíme, že i q je sudé a lze jej zapsat jako $2n$ pro n přirozené. Výchozí zlomek p/q lze tedy krátit 2 na tvar m/n, což je ale v rozporu s předpokladem, že zlomek p/q je v základním tvaru. Z toho vyplývá, že $\sqrt{2}$ nelze zapsat jako zlomek a tudíž se jedná o číslo *iracionální*.

Geometrický důkaz

Možnost zapsat poměr dvou délek jako zlomek znamená v řeči geometrie to, že existuje jejich společná *míra*, tj. existuje nějaká úsečka vhodné délky tak, že obě poměřované délky lze vyjádřit jako celočíselný násobek míry[2].

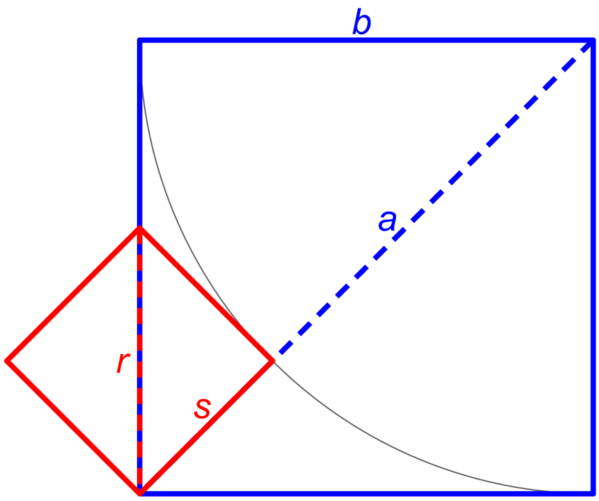
Vyjdeme ze skutečnosti, že poměr úhlopříčky a strany čtverce je právě $\sqrt{2}$. Předpokládejme nyní, že úsečky a a b na obr. 1 jako úhlopříčka a strana čtverce mají společnou míru m. Na úhlopříčku naneseme stranu čtverce a v koncovém bodě vztyčíme kolmici. Pomocí tohoto bodu a průsečíku kolmice se stranou čtverce zkonstruujeme menší čtverec (na obrázku červeně).

Nepochybně platí $a - b = s$ a $b - s = r$. Úhlopříčka a i strana b modrého čtverce mají společnou míru m, proto i jejich rozdíl s lze vyjádřit jako celočíselný násobek m stejně tak i r jako rozdíl b a s, $s = (p - q)m$ a $r = (2q - p)m$. Zjistili jsme tedy, že úhlopříčka i strana menšího (červeného) čtverce mají stejnou společnou míru m. Zároveň však platí, že $r/s = a/b$, neboť všechny čtverce jsou si navzájem podobné.

Nyní můžeme opakovat konstrukci dalšího čtverce pouze s tím rozdílem, že za výchozí vezmeme červený čtverec. Beze změny můžeme znovu použít veškeré argumenty předchozího odstavce a tím odvodíme, že i úhlopříčka a strana nového čtverce mají míru m. Postup můžeme

[1] V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami 1 a přeponou $\sqrt{2}$ je přepona větší než jedna odvěsna, ale menší než jejich součet.

[2] Máme-li tedy úsečky délek a a b, znamená existence míry m skutečnost, že pro nějaká přirozená p a q platí $a = pm$ a $b = qm$. Poměr $a/b = p/q$ a je zřejmé, že je to racionální číslo. Takové úsečky nazýváme souměřitelné.



Obrázek 1: Konstrukce pro důkaz iracionality $\sqrt{2}$.

znovu a znovu opakovat, čímž konstruujeme stále menší a menší čtverce. Nepochybně v některém kroku nastane situace, že úhlopříčka i strana nového čtverce budou menší než m, z čehož vyplývá, že je nelze vyjádřit jako celočíselný násobek m. Zde jsme dospěli ke sporu, což znamená, že společná míra úhlopříčky a strany čtverce neexistuje a poměr a/b nelze vyjádřit racionálním číslem.

Dvěma různými způsoby (oba pocházejí již od starořeckých matematiků) jsme tedy prokázali, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo a tudíž i to, že taková čísla existují!