7 Sestavte si svoje iracionální číslo

Doposud jsme se zabývali tím, že jsme pro určitá čísla dokazovali, že jsou iracionální. Zkusme nyní přistoupit k problému tak trochu z druhé strany. Budeme se snažit vytvořit nějaká čísla takovým způsobem, aby byla iracionální.

Existuje nějaké obecné pravidlo, jak rozlišit racionální a iracionální čísla? Odpověď je kladná, jednou z možností je zkoumat desetinný zápis čísla. Víme, že celá čísla desetinnou část vůbec nemají, zlomky mají desetinný rozvoj buď konečný nebo nekonečný, ale v tomto případě je jeho koncová část periodická. Zároveň jsme se učili, jak takový periodický rozvoj převést zpět na zlomek. A zbývá poslední možnost, že desetinný rozvoj není nikde ukončen a přitom není periodický. V tomto případě máme iracionální číslo. Uveďme nejprve příklad ke každé variantě[1]:

5	$5,000000000000...$	celé číslo
$\frac{11}{8}$	$1,375000000000...$	racionální číslo s konečným desetinným rozvojem
$\frac{2273}{550}$	$4,132727272727...$	racionální číslo s nekonečným periodickým rozvojem
π	$3,141592653589...$	iracionální číslo

Výše popsané pravidlo nám nikterak neposlouží při důkazu iracionality např. čísla $\sqrt[3]{15}$ nebo π. Dnes s pomocí počítačů je sice umíme vypočítat na mnoho miliard číslic, ale nikde tím není zaručeno, že se na dalších místech neobjeví periodicita. Tady jsou důkazy, které jsme si ukázali, nezastupitelné. Na druhé straně pro konstrukci iracionálních čísel je toto pravidlo tím pravým nástrojem.

Naší snahou nyní bude sestavit číslo s nekonečným desetinným rozvojem, který však (na svém závěru) není periodický. Možná se zdá, že zadané podmínky jsou částečně protichůdné (Jak je možné popsat nekonečnou řadu číslic bez využití periodicity?), ale následující odstavce nás přesvědčí, že je skloubit lze.

- Uvažujme číslo s takovýmto desetinným zápisem

  $$N_1 = 0,11000\,10000\,00000\,00000\,00010\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\ldots.$$

  Jeho desetinná část se skládá ze samých nul, pouze na pozicích odpovídajících faktoriálům přirozených čísel[2] je jednička. Je možné ho tedy zapsat jako

  $$N_1 = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}.$$

  Číslo N_1 se často nazývá Liouvillova konstanta na počest francouzského matematika, který se podrobně zabýval čísly zapsanými ve tvaru

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i!}}$$

[1] Pro úplnost je třeba uvést, že např. číslo $\frac{11}{8}$ je možné zapsat i periodickým rozvojem $1,37499999...$ (rovnost snadno ověříme sečtením periodické části jako geometrické řady). Kromě obdobných případů (kdy desetinný rozvoj je prázdný nebo konečný) je zápis jednoznačný.

[2] tj. na pozicích 1, 2, 6, 24, 120, ...

pro nějaké přirozené $b \geq 2$ a libovolnou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou tvořeny pouze čísly 0 až $b-1$. Při pohledu na N_1 je již zřejmé, že rozvoj je skutečně nekonečný a zároveň nemůže být periodický, neboť počet nul mezi sousedními jedničkami neustále narůstá. Velkou výhodou těchto čísel je skutečnost, že je lze zapsat relativně jednoduchou matematickou formulí a tím je studovat a používat při různých výpočtech.

- Podobně vytvoříme další čísla, stačí nahradit funkci $n!$ jinou vhodnou, např. n^2 nebo 2^n. V prvním případě budou jedničky na pozicích 1, 4, 9, 16, 25, ...

$$N_2 = 0,10010\,00010\,00000\,10000\,00001\,00000\,00000\,10000\,00000\,00010\ldots,$$

ve druhém na pozicích 1, 2, 4, 8, 16, ...

$$N_3 = 0,11010\,00100\,00000\,10000\,00000\,00000\,01000\,00000\,00000\,00000\ldots.$$

I v tomto případě existují jednoduché zápisy těchto čísel

$$N_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i^2}} \quad \text{respektive} \quad N_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2^i}}.$$

Samozřejmě můžeme v čitateli použít dvojky či sedmičky, střídat šestky s devítkami nebo cyklicky měnit čísla od jedné do devíti. V tomto se vaší představivosti meze nekladou.

- Neomezenou posloupnost číslic bez periodicity lze tvořit také následujícími způsoby. Budeme vkládat postupně jednu jedničku, dvě jedničky, tři, čtyři, atd., přičemž mezi ně vždy vložíme oddělovací nulu

$$N_4 = 0,10110\,11101\,11101\,11110\,11111\,10111\,11110\,11111\,11101\,11111\ldots$$

nebo oddělovacích nul bude vždy stejně jako jedniček

$$N_5 = 0,10110\,01110\,00111\,10000\,11111\,00000\,11111\,10000\,00111\,11110\ldots.$$

Jinou možností je zapisovat po číslicích za sebou přirozená čísla od jedné výše, případně je opět oddělovat nulou

$$N_6 = 0,12345\,67891\,01112\,13141\,51617\,18192\,02122\,23242\,52627\,28293\ldots$$

$$N_7 = 0,10203\,04050\,60708\,09010\,01101\,20130\,14015\,01601\,70180\,19020\ldots.$$

Vzrůstající posloupnost přirozených čísel můžeme zaměnit za mocniny 2

$$N_8 = 0,10204\,08016\,03206\,40128\,02560\,51201\,02402\,04804\,09608\,19201\ldots$$

nebo za členy Fibonacciho posloupnosti[3]

$$N_9 = 0,10102\,03050\,80130\,21034\,05508\,90144\,02330\,37706\,10098\,70159\ldots.$$

- Pro vytvoření neperiodické posloupnosti můžeme využít i vlastnosti prvočísel. Víme, že je jich nekonečně mnoho, a bylo dokázáno, je jejich průměrná hustota postupně klesá. Z toho vyplývá, že jejich rozdělení nemůže být periodické. Iracionální číslo můžeme vytvořit tak, že na pozici odpovídající prvočíslu zapíšeme jedničku a na ostatní zapíšeme nulu

$$N_{10} = 0,01101\,01000\,10100\,01010\,00100\,00010\,10000\,01010\,10100\,01000\ldots.$$

[3]definujeme $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a další členy pomocí rekurentního vzorce $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- Naprosto jiný přístup k definování nekonečné číselné řady představil roku 1986 matematik John Conway, dnes se takové řady často nazývají audioaktivní posloupnosti. Začneme libovolným číslem, např. 1. To přečteme *jedna jednička* a připíšeme 11, což přečteme *dvě jedničky* a zapíšeme 21, pokračujeme *jedna dvojka, jedna jednička* a píšeme 1211. Uvedeným způsobem přidáváme stále další číslice. Dostáváme číslo

  $$N_{11} = 0,11121\,12111\,11221\,31221\,11311\,22211\,11321\,32113\,11312\,11131\ldots.$$

  Začít můžeme s jiným číslem a výsledná posloupnost bude odlišná. Kromě výchozího čísla 22 je posloupnost neperiodická. Přestože se zdá, že takové posloupnosti bude prakticky nemožné studovat matematickými prostředky, dokázal o nich autor kromě jiných i následující překvapivou vlastnost. Poměr počtu číslic vždy následujících položek má univerzální limitu ($\lambda \simeq 1,303577269$) nezávisle na počátečním čísle[4].

Poté, co jsme načerpali inspiraci, přistoupíme k vytvoření vlastního iracionálního čísla, tj. takového, které téměř s jistotou doposud nikdo nezapsal ani nestudoval.

Jako celou část zvolíme -287, to je pravděpodobný rok narození Archimeda ze Syrakus. Na prvních devět desetinných míst opíšeme cifry z Conwayovy konstanty λ. Práci dokončíme tak, že použijeme rozdělení prvočísel (viz číslo N_{10}), ale místo každé jedničky zapíšeme cifru z desetinného rozvoje čísla π, tj. postupně 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, atd. Zápis našeho čísla je tedy následující

$$M = -287,30357\,72690\,31040\,10005\,09000\,20600\,05000\,00305\,00000\,80907\ldots.$$

Bylo by dosti překvapivé, kdyby přesně stejné myšlenky vedly již někoho před námi. Stejně překvapivé by bylo, kdyby právě vytvořené číslo M bylo pro matematiku nějak významné, nepochybně to však je číslo iracionální. Nyní je na vás popustit uzdu fantazii (k tomu asi obyčejně nemíváte v matematice příliš prostoru) a vytvořit si své vlastní iracionální číslo.

[4]jedinou výjimku tvoří degenerovaná posloupnost pro již zmíněné číslo 22