8 Kolik je iracionálních čísel?

Již v úvodu našeho seriálu jsme si ukázali, že racionálních čísel je neomezeně mnoho. Kolik je však iracionálních čísel?

Obsahem předchozích dílů bylo to, že jsme prokázali existenci iracionálních čísel. Byť bychom získali i jedno jediné, další bychom mohli konstruovat pomocí základních početních operací. Mějme iracionální číslo x a libovolné racionální číslo r. Pokud by součet či rozdíl byl roven jinému racionálnímu číslu s (tj. $x \pm r = s$), pak by platilo

$$x = s \mp r.$$

Rozdíl i součet libovolných racionálních čísel je opět číslo racionální, což je v rozporu s tím, že se rovná iracionálnímu x. Z toho plyne, že $x \pm r$ je číslo iracionální. Analogický důkaz můžeme provést i pro $x.r$, x/r a r/x. Speciálním případem posledního podílu je převrácená hodnota čísla, tím je tedy dokázáno, že také např. $1/\pi$ je iracionální číslo. Další iracionální čísla můžeme získat jako odmocniny (i řádů vyšších než 2) iracionálních čísel. Pokud bychom mohli zapsat takovou odmocninu jako zlomek $\sqrt[n]{x} = p/q$ (pro $x > 0$ a p, q i n přirozené), pak po umocnění máme

$$x = \frac{p^n}{q^n},$$

což však je evidentně číslo racionální ve sporu s počátečním předpokladem. Tím jsme prokázali iracionalitu čísel jako $\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\log_3 100}$ apod.[1]

Předchozí odstavec (stejně tak i předchozí díly našeho seriálu) ukázal, že iracionálních čísel rozhodně není méně než čísel racionálních. Kolik jich tedy je? Již víme, že jich je neomezeně mnoho. Tady se dostáváme tak trochu na tenký led, protože se chystáme srovnávat nekonečné množiny. U konečných množin jednoduše určíme počty prvků, které snadno porovnáme. Jak ale můžeme poměřovat nekonečna? Jsou všechna stejná? Přesný matematický význam těmto otázkám dal až Georg Cantor v 70. letech 19. století, který mj. ukázal, jak porovnávat nekonečné množiny a že existují nekonečna různých řádů. Bližší popis těchto jistě kromobyčejně zajímavých partií matematiky je již mimo rámec tohoto textu.

Uvedený německý matematik a logik dokázal, že v matematicky dobře definovaném významu je reálných čísel „mnohem“ více než čísel racionálních. Zatímco racionální čísla je možné jistým způsobem očíslovat (tím je vlastně přiřadit přirozeným číslům), u reálných čísel nic podobného udělat nelze. Matematici říkají, že mohutnost množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel a mohutnost množiny $\mathbb{Q}$ čísel racionálních je stejná, takové množiny nazýváme *spočetné* (jejich prvky se dají očíslovat a tedy spočítat). Naproti tomu mohutnost množiny $\mathbb{R}$ čísel reálných je větší, množina je *nespočetná*. Jsou to právě iracionální čísla, která odlišují množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$, což znamená že iracionálních čísel je nespočetně mnoho. A tedy více než čísel racionálních. Iracionální čísla tedy netvoří pár bizarních výjimek v moři všech reálných čísel, ale je tomu právě naopak.

Pokud jste si z několika dílů seriálu o iracionálních číslech odnesli dojem, že v této oblasti již není co zkoumat a že matematici již zodpověděli všechny otázky, je třeba ho poupravit. Existuje množství čísel v matematice široce používaných, o kterých nevíme, do které množiny

[1] Ve výše zmíněných důkazech je podstatné, že r je číslo racionální. V opačném případě již výsledek operace iracionální být nemusí, o čemž svědčí protipříklady $\sqrt{8}/\sqrt{2} = 2$ nebo $\log 150 - \log 15 = 1$. Podobně mocnina iracionálního čísla již obecně iracionální není, viz $\left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8$.

je přiřadit. Do této skupiny patří řada čísel kombinujících Eulerovo a Ludolfovo číslo (např. $e \pm \pi$, π/e, π^e), dále např. významná Eulerova (též Eulerova-Mascheroniho) konstanta

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n \right),$$

Catalanova konstanta používaná v pokročilejší kombinatorice

$$G = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)^2}$$

nebo hodnota velmi důležité Riemannovy funkce

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x}$$

pro $x = 5, 7, 9, \ldots$ (lichá přirozená čísla ≥ 5)[2]. Stejně jako ve většině dalších oborů lidské činnosti i zde zůstává mnoho bílých míst, která čekají na své objevitele.

Závěr

Vraťme se ještě jednou do prvního dílu seriálu. Tam jsme si položili otázku, zda vůbec existují nějaká jiná čísla než racionální. Postupně jsme pro několik čísel, která mají dobrý smysl a svou nespornou použitelnost, ukázali, že je nelze zapsat jako zlomek. Jsou tedy iracionální. V tomto díle bylo dokázáno, že iracionálních čísel rozhodně není méně než čísel racionálních. Dále jsme si řekli (již bez bližšího vysvětlení či důkazu), že v jistém smyslu je jich dokonce mnohem více. Opravdu *mnohem* více, racionální čísla jsou mezi všemi reálnými čísly vlastně spíše raritou. Číselná osa tvořená pouze racionálními čísly je tedy značně „děravá“. Stejně tak je možné sestrojit přímky v rovině, které procházejí počátkem a přitom míjejí všechny další body s celočíselnými souřadnicemi. A opět platí, že těchto přímek je vlastně mnohem více, takže „trefit“ některý mřížový bod je spíše výjimkou. To jsou poměrně překvapivé výsledky a vidíme, že tentokrát nás naše intuice zklamala.

Použitá literatura

Zdroje jsou uvedeny v abecedním pořadí dle jména autora nebo jména elektronického zdroje.

Ball, Keith: Podivuhodné křivky, počítání králíků a jiná matematická dobrodružství, *Argo/Dokořán*, 2011

Kac, Mark a Ulam, Stanislaw M.: Matematika a logika, *SNTL*, Praha 1977

Kolman, Vojtěch: Filosofie čísla, *Filosofia*, Praha 2008

Pickover, Clifford A.: Matematická kniha, *Argo/Dokořán*, 2012

Niven, Ivan: A simple proof that π is irrational, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), no. 6

ProofWiki: on-line matematické důkazy, elektronicky na `http://www.proofwiki.org`

Weisstein, Eric W.: *MathWorld*, elektronicky na `http://mathworld.wolfram.com`

Wikipedia: internetová encyklopedie, elektronicky na `http://en.wikipedia.org` v angličtině, na `http://cs.wikipedia.org` v češtině

[2] pro $x = 1$ řada diverguje a iracionalitu $\zeta(3)$ dokázal Roger Apéry v roce 1979