A Úlohy

Zde naleznete několik příkladů k procvičení a tím i hlubšímu pochopení tématu. Při řešení můžete využít všech faktů odvozených v textu. Příklady jsou zhruba seřazeny dle náročnosti od jednodušších k obtížnějším. Snažte se je nejprve samostatně vypracovat, až v případě nejasností či pro kontrolu můžete své výsledky porovnat s řešením.

1 Zlatý řez Rozdělení zadané délky na dva díly tak, že poměr delší ku kratší části je roven poměru celku ku delší části, je ve výtvarném umění a architektuře často považováno za zvláště harmonické a esteticky dokonalé. Tento poměr dostal dokonce honosný název *zlatý řez*. V matematice se obyčejně označuje φ a snadno se vypočte jeho hodnota $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Ukažte, že hodnota zlatého řezu je iracionální.

2 Logaritmy Použijte základní logaritmické identity a dokažte, že $\log_3 \frac{2}{9}$ a $\log_7 \sqrt[5]{18}$ jsou iracionální čísla.

3 Iracionalita π^2 Po prostudování důkazu iracionality π v 6. díle seriálu zkuste pomocí minimální změny postupu dokázat silnější tvrzení, že π^2 je iracionální. Tvrzení pro π je pak již jeho snadným důsledkem.

4 Vlastní číslo Sestavte si své vlastní iracionální číslo, 7. díl k tomu poskytuje dostatek inspirace.

5 Geometrický důkaz Ve 2. díle seriálu jsme kromě algebraického důkazu iracionality $\sqrt{2}$ poskytli i důkaz pomocí nesouměřitelnosti úseček, tj. důkaz geometrický. V pravidelném pětiúhelníku je poměr úhlopříčky a strany roven hodnotě zlatého řezu φ (viz příklad 1). Podobným geometrickým postupem zkuste dokázat nesouměřitelnost těchto úseček, stejně jako to uměli již staří Řekové. Nápověda: úhlopříčky v pětiúhelníku vymezí menší pětiúhelník, jehož stranu a úhlopříčku vyjádřete pomocí délek výchozího útvaru.

6 Iracionalita e^2 Dokažte iracionalitu čísla e^2 postupem částečně podobným jako v 4. díle seriálu. Začněte důkaz sporem pomocí předpokladu, že lze psát $e^2 = p/q$ pro nějaká přirozená p a q. Tuto rovnost převeďte na tvar

$$qe = p\,\frac{1}{e} = pe^{-1}.$$

Nyní dosaďte za e i za jeho převrácenou hodnotu rozvoj nekonečné řady exponenciální funkce pro odpovídající argument

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

řada konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Dále seskupte členy se stejným jmenovatelem, vynásobte celou rovnici vhodným koeficientem a oddělte členy s celočíselnou hodnotou. Zbytek zkuste odhadnout tak, abyste dokázali, že nemůže být celočíselný. Všechny tyto kroky mají svou obdobu v důkazu iracionality e.