Zadání úloh 1. kola 61. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Temná hmota

Jedna z galaxií se skládá z kulového jádra o poloměru $r_j = 4$ kpc a tenkého disku se stejným středem a vnějším poloměrem $r_v = 15r_j$. Hmotnost disku s hvězdami je zanedbatelná v porovnání s hmotností jádra. V jádře galaxie jsou hvězdy rozloženy rovnoměrně.

Bylo zjištěno, že velikost rychlosti, jakou hvězdy disku obíhají kolem jádra, je od vnějšího okraje disku až k hranici jádra stejná: $v_0 = 240\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Tento jev může být vysvětlen existencí temné hmoty, která se nachází v kulové vrstvě kolem jádra galaxie a sahá až k jejímu okraji.

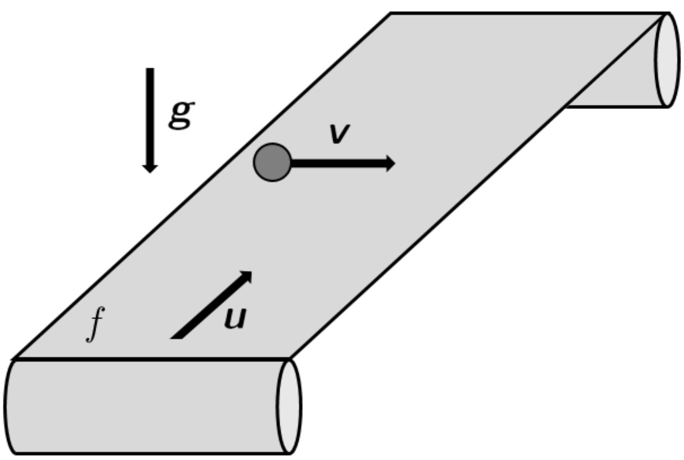
a) Určete hmotnost jádra galaxie M_j.
b) Určete průměrnou hustotu ρ_j látky v galaktickém jádře.
c) Najděte závislost hustoty temné hmoty ρ_t na vzdálenosti r od středu galaxie.
d) Určete poměr hmotností temné hmoty a jádra galaxie $\dfrac{M_t}{M_j}$.

Gravitační konstanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, 1 kpc $= 3{,}086 \cdot 10^{19}$ m.

2. Kotouč na pohyblivém pásu

Na dopravní pás, pohybující se ve vodorovné rovině rychlostí o velikosti u, vsuneme malý kotouč rychlostí $\boldsymbol{v}_0 \perp \boldsymbol{u}$. Součinitel tření mezi kotoučem a pásem je f. Tíhové zrychlení je $\boldsymbol{g}$. Určete:

a) Velikost a směr okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}_0'$ puku vzhledem k pásu transportéru na počátku jeho pohybu
b) velikost a směr zrychlení $\boldsymbol{a}$ puku na počátku jeho pohybu,
c) dobu t, za kterou se puk na pásu zastaví,
d) velikost a směr minimální rychlosti puku $\boldsymbol{v}_{\min}$ vzhledem k zemi během jeho pohybu po dopravním pásu.



Obr. 1

3. Mlha nad městem

Ve dne byla teplota vzduchu nad městem 25 °C a vlhkost vzduchu $\phi = 80$ %. Večer teplota klesla na 18 °C.

a) Jaké teplo se uvolnilo při vzniku mlhy nad městem, když víme, že kruhový obchvat města má délku $l = 56$ km a výška vrstvy mlhy byla $h = 100$ m?

b) Klimatizační zařízení budovy ve stejném městě, jejíž vnitřní prostor má objem 10 000 m^3, upravuje ve dne vzduch na teplotu 20 °C a vlhkost na $\phi_1 = 60$ %. Jaké množství vody přitom musí zkondenzovat?

c) Když v kanceláři stejné budovy vytáhnete z ledničky krabici mléka, orosí se. Jaká by musela být v místnosti relativní vlhkost vzduchu, aby se při vytažení krabice z ledničky, kde je teplota 5 °C, láhev neorosila?

Molární hmotnost vody $M = 18 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, hustota vody $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}, měrná tepelná kapacita vody $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ J · kg^{-1} · K^{-1}, měrné skupenské teplo vypařování $l_v = 2{,}3 \cdot 10^6$ J · kg^{-1}, tlak sytých par vody (při teplotách ve °C) je $p_5 = 0{,}866 \cdot 10^3$ Pa, $p_{18} = 2{,}07 \cdot 10^3$ Pa, $p_{20} = 2{,}34 \cdot 10^3$ Pa, $p_{25} = 3{,}17 \cdot 10^3$ Pa.

4. Objev neutronu

V roce 1930 ostřelovali Bothe a Becker berylium částicemi α o energii 4,5 MeV. O dva roky později Chadwick ukázal, že při této reakci vznikají nenabité částice o hmotnosti podobné hmotnosti protonu.

a) Napište rovnici reakce a pomocí výpočtu energie reakce ukažte, že reakce může probíhat.

b) Maximální energie vznikajících neutronů je 4,5 MeV. Určete jejich vlnovou délku a rozhodněte, zda bude docházet k jejich ohybu na kovové krystalové mřížce, když rozměry atomů jsou řádově 10^{-10} m.

c) Určete rychlost neutronů po jejich zpomalení ve vodě na vlnovou délku $\lambda = 0{,}10$ nm a rozhodněte, jaká část neutronů může proletět zkušebním tunelem vzdálenost 300 m, je-li poločas rozpadu volného neutronu 11,7 min.

Hmotnosti některých nuklidů jsou uvedeny v tabulce.

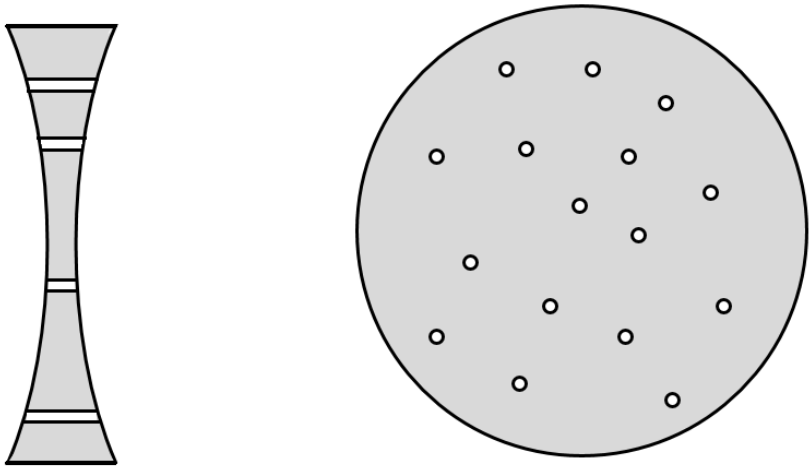
nuklid	hmotnost/m_u	nuklid	hmotnost/m_u	nuklid	hmotnost/m_u
${}^1_0$n	1,008 665	${}^9_4$Be	9,012 182	${}^{14}_7$N	14,003 074
${}^1_1$H	1,007 825	${}^{10}_5$B	10,012 938	${}^{16}_8$O	15,994 914
${}^4_2$He	4,002 603	${}^{11}_5$B	11,009 305	${}^{17}_8$O	16,999 133
${}^6_3$Li	6,015 126	${}^{12}_6$C	12,000 000	${}^{18}_8$O	17,999 159
${}^7_3$Li	7,016 005	${}^{13}_6$C	13,003 354		

5. Vadná čočka

Při výrobě tenké čočky ze skla o indexu lomu $n_0 = 1{,}69$, ohraničené dvěma kulovými plochami, došlo k technické závadě a uvnitř čočky zůstala řada vzduchových bublinek, které se dotýkají obou kulových ploch čočky (obr.). Čočka byla vložena do vody (index lomu $n_1 = 1{,}33$), osvětlena ve směru optické osy širokým svazkem rovnoběžných paprsků, a ve vzdálenosti $a = 40$ cm za čočku bylo postaveno stínítko, rovnoběžně s čočkou a kolmo na optickou osu čočky. Na stínítku vznikl světlý kruh o dvojnásobném průměru, než je průměr čočky d. Kromě toho ale také uprostřed tohoto kruhu vznikl malý kruh o průměru d_1, jehož osvětlení bylo $k = 3$-krát větší, než osvětlení zbytku velkého kruhu.

a) Určete poměr $\dfrac{d_1}{d}$.

b) Určete, kolik procent ε z celkové plochy čočky tvoří bublinky.

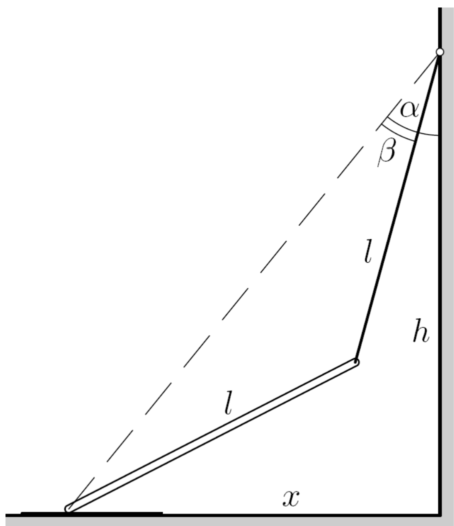


Obr. 2

6. Praktická úloha: Měření součinitele smykového tření mezi koncem dřevěné tyče a podložkami z různých materiálů

Pomůcky: dřevěná tyč dlouhá 0,5 m až 1 m, provázek, délkové měřidlo, podložky z různých materiálů (papír, guma, skelný papír aj.)

Provedení úlohy: Na konec tyče délky l přivážeme provázek stejné délky l a jeho konec připevníme na svislou stěnu do výšky h. Druhý konec tyče položíme na podložku ze zkoumaného materiálu, která leží na podlaze, a podložku zvolna posouváme směrem od stěny. V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, změříme jeho vzdálenost x od stěny (obr. 3).



Obr. 3

Úkoly:

- Úhly α a β vyznačené v obrázku vyjádřete obecně pomocí h a x.
- Dokažte, že součinitel f smykového tření mezi koncem tyče a podložkou můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$f = \frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}\,.$$

- Proveďte měření a výpočty pro různé podložky a pro různé výšky bodu upevnění v intervalu $l < h < 2l$. Získané výsledky posuďte.

7. Tři spojená tělesa

Tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 jsou spojena pružným vláknem vedeným přes kladku podle obrázku. Kladka, připojená k tělesu o hmotnosti m_3, má zanedbatelnou hmotnost. Tělesa leží na hladké vodorovné podložce. Vlákno je na počátku v nenapjatém stavu. Tělesu o hmotnosti m_3 udělíme nárazem počáteční rychlost v směrem doleva. Určete:

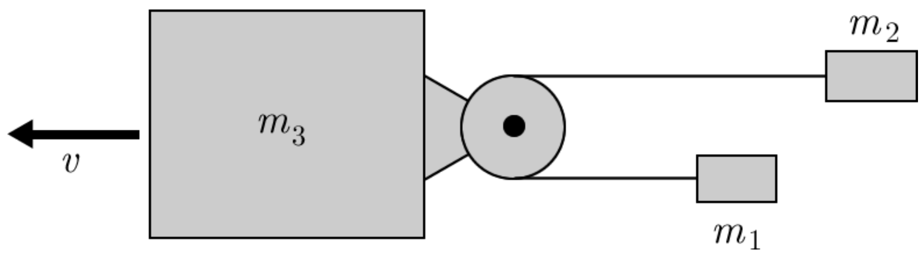
a) Okamžité rychlosti v_1 a v_2 těles o hmotnostech m_1 a m_2 v závislosti na okamžité rychlosti v_3 tělesa o hmotnosti m_3.

b) Rychlosti v_1, v_2 a v_3 těles v okamžiku, kdy je vlákno nejvíce napjaté.

c) Rychlosti těles v okamžiku, kdy vlákno přestane být napínáno.

Nápověda: Uvažte, že v okamžiku, kdy je vlákno nejvíce napjaté, nabývá jeho délka svého maxima a její derivace podle času je nulová.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg, $v = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



Obr. 4