Úlohy 1. kola 62. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

1. Jízda v metru

Zdeněk přestupuje ve stanici Florenc z trasy B na trasu C. Z pohyblivých schodů vyjede v místě, kde obvykle stojí tažný vůz vlaku, ale vidí, že vlak je již v pohybu. Předposlední vůz vlaku ho mine za dobu $t_1 = 3{,}2$ s, poslední vůz za dobu $t_2 = 2{,}7$ s.

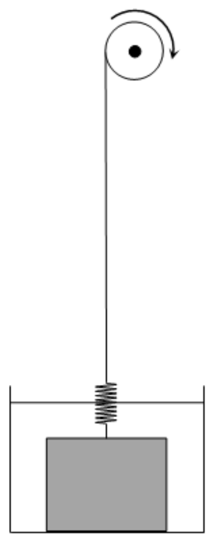
a) Před jakou dobou t se vlak metra dal do pohybu?

b) Kolik vozů měl vlak metra?

c) Vzdálenost mezi stanicí Florenc a následující stanicí Vltavská je $s_z = 1\,200$ m. Vlak se při rozjíždění pohybuje rovnoměrně zrychleně, pak rovnoměrně a při brzdění rovnoměrně zpomaleně. Jakou rychlostí v se vlak mezi stanicemi pohybuje při rovnoměrném pohybu, jestliže celková doba jízdy mezi zastávkami $t_z = 120$ s a z toho na rozjíždění a brzdění vlak potřebuje celkem čas $\Delta t = 60$ s?

2. Těleso na pružině tažené z vody

V sudu tvaru válce o vnitřním obsahu dna $S = 0{,}30\,\mathrm{m}^2$ je postavena válcová uzavřená nádoba. Nádoba má obsah podstavy $S_0 = 0{,}20\,\mathrm{m}^2$, výšku $h_0 = 0{,}60$ m a hmotnost $m_0 = 180$ kg. Do sudu nalijeme vodu o objemu $V = 90$ l. Hustota vody je $\rho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Do středu horní podstavy nádoby připevníme pružinu o tuhosti $k = 4\,000\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Její druhý konec spojíme s lanem spuštěným z navijáku tak, že pružina není napínána.



Obr. 1

a) Určete výšku h_1 hladiny vody v sudu a dokažte, že nádoba zůstane na dně.

b) Sestrojte graf závislosti síly napínající lano na čase, jestliže se lano navíjí rychlostí $v = 0{,}050\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Čas měříme od okamžiku, kdy se pružina začíná napínat, do okamžiku, kdy se celá nádoba vynoří z vody.

c) Určete práci vykonanou elektromotorem.

Hmotnost pružiny, lana a kladky zanedbejte. **Z důvodu snazšího sestrojení grafu** počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

3. Pohyb hranolu

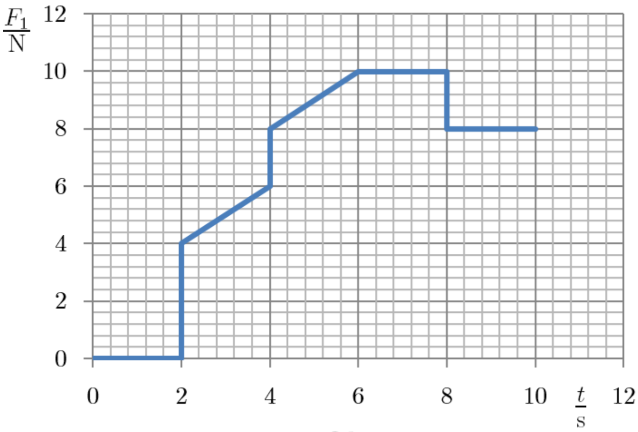
Na vodorovné podložce leží kvádr o hmotnosti $m = 1$ kg (obr. 2). Součinitel tření mezi kvádrem a podložkou je $f = 0{,}4$. Směrem doleva působí síla F_1, jejíž velikost závisí na čase podle obr. 3 a směrem doprava přes volnou kladku síla F_2, jejíž velikost závisí na času podle obr. 4. Hmotnost kladky je zanedbatelná, vlákna jsou pevná a mají zanedbatelnou hmotnost.

Obr. 2

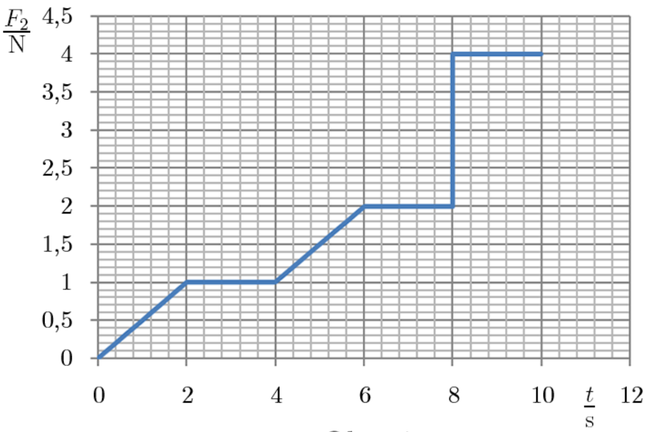
a) Kterým směrem se bude hranol pohybovat? Odpověď zdůvodněte.

b) Nakreslete grafy závislosti zrychlení a rychlosti na času a určete dráhu, kterou hranol urazí za prvních 10 s.

Tíhové zrychlení uvažujte $10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



Obr. 3



Obr. 4

4. Dva spojené válce

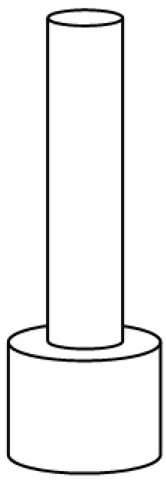
Těleso o hmotnosti M je složeno ze dvou souosých plných válců stejné hustoty. Spodní válec má průměr i výšku d, horní válec má průměr poloviční a výšku trojnásobnou než spodní válec.

a) Určete poměr hmotností $\dfrac{m_1}{m_2}$ spodního a horního válce.

b) Určete výšku h_T těžiště tělesa.

c) Určete moment setrvačnosti J tělesa vzhledem ke svislé ose souměrnosti.

d) Jakou výšku h_2 by musel mít horní válec, aby těžiště tělesa bylo ve společném středu podstav?



Obr. 5

5. Vaření vody

Radek vaří vodu v čajové konvici na elektrickém vařiči. Voda v konvici má počáteční teplotu $t_0 = 20\ °\mathrm{C}$. Když po době $\tau_1 = 2$ min měla voda teplotu pouze $t_1 = 40\ °\mathrm{C}$, polovinu vody vylil. Když po další době $\tau_2 = 1$ min teplota stoupla jen na $t_2 = 55\ °\mathrm{C}$ vylil Radek polovinu zbylé vody. Přitom nechtěně snížil výkon vařiče na polovinu.

a) Za jakou dobu τ_3 začne voda nyní vařit (tj. dosáhne teploty $t_3 = 100\ °\mathrm{C}$)?

b) Jak dlouho by trvalo vaření vody, kdyby Radek během vaření vodu neuléval?

c) Jak dlouho by trvalo vaření vody, kdyby Radek po dvou minutách polovinu vody vylil, ale pak už nechal vodu i vařič bez povšimnutí?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Tepelnou setrvačnost vařiče při změně výkonu zanedbejte. Tepelná kapacita vody na začátku děje je C, čajníku C_0. Únik tepla do okolí zanedbejte.

6. *Praktická úloha:* **Studium modelu plynu v nádobě**

Úloha navazuje na článek 1.5 v učebnici Bartuška, K., Svoboda, E.: Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika. Pozorně jej prostudujte.

Mějme nádobu, kterou symbolicky rozdělíme na dvě části stejného vnitřního objemu. Do nádoby napustíme plyn s počtem N částic stejného druhu a budeme v náhodně vybraných okamžicích zjišťovat počet N_l částic v levé polovině nádoby a počet N_p částic v pravé polovině nádoby ($N_\mathrm{l} + N_\mathrm{p} = N$). Provedeme simulační experiment s náhodným rozdělením 7 částic v levé a v pravé polovině nádoby.

Úkoly:

a) Rozdělení 7 částic budete simulovat házením 7 stejných mincí. Předem dohodou stanovíme, že dopad konkrétní mince lícem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v levé polovině nádoby a dopad rubem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v pravé polovině nádoby. Všech 7 mincí vezmeme do dlaní, důkladně protřepeme a hodíme na vodorovnou ohraničenou plochu. Po dopadu zjistíme počet N_l mincí, které dopadly lícem navrch a počet N_p mincí, které dopadly rubem navrch. Výsledek pokusu, tj. rozdělení na N_l a N_p, zaznamenáme čárkou v příslušném řádku 2. sloupce tabulky. Takto provedeme nejméně 220 pokusů. Poté zapíšeme počty čárek v jednotlivých políčkách. Ve 3. sloupci spočteme změřenou pravděpodobnost, tj. poměr počtu konkrétního stavu a celkového počtu pokusů, výsledek vyjádříme desetinným číslem zaokrouhleným na 3 platné číslice. V posledních dvou sloupcích uvedeme výsledky teoretické pravděpodobnosti, tj. poměr předpokládaného počtu stavů s daným rozdělením a počtu stavů všech možných rozdělení. Tento teoretický rozbor až pro 4 částice je uveden ve zmíněné učebnici.

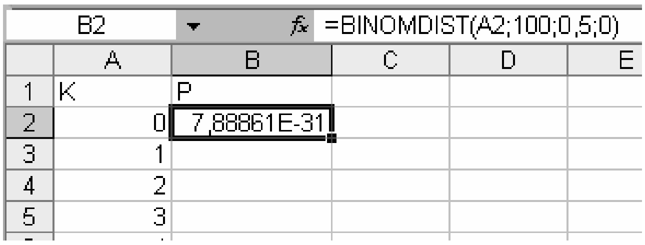
$N_\mathrm{l} – N_\mathrm{p}$	Změřený počet stavů	Změřená pravděpodobnost	Teoretická pravděpodobnost	
	Čárky – počet	Desetinné číslo (3 platné číslice)	Zlomek	Desetinné číslo (3 platné číslice)
0 – 7				
1 – 6				
2 – 5				
3 – 4				
4 – 3				
5 – 2				
6 – 1				
7 – 0				
Součet				

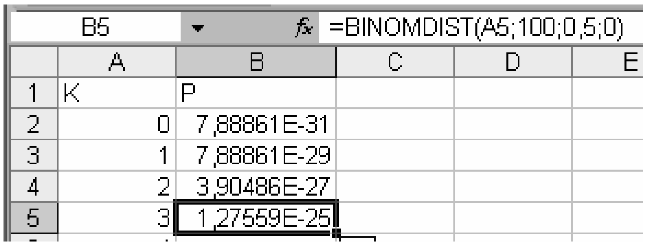
b) Sestrojte v Excelu sloupcové grafy závislosti změřené a teoretické pravděpodobnosti rozdělení na počtu částic ve zvolené (levé) polovině nádoby (oba grafy v jednom obrázku).

Statistika, kterou vyšetřujeme, patří mezi *binomická rozdělení.* Teoretická pravděpodobnost, že ve zvolené polovině nádoby bude K částic z celkového počtu N, je

$$p(K, N) = \frac{\binom{N}{K}}{2^N} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-K)}{2^N \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot K}.$$

V Excelu ji můžeme vypočítat pomocí statistické funkce BINOMDIST, kam jako parametry dosadíme K; N; 0,5; 0. Chceme-li například vypočítat rozdělení pravděpodobnosti pro $N = 100$, použijeme tabulku podle obr. 6. Do prvního sloupce vložíme čísla od 0 do 100 a do buňky B2 funkci BINOMDIST s parametry A2; 100; 0,5; 0 (obr. 6a). Druhý sloupec pak vypočítáme posouváním vyplňovacího táhla (obr. 6b). Z vyplněné tabulky pak vytvoříme *xy bodový graf.*





Obr. 6a Obr. 6b

c) Vyšetřete rozdělení teoretické pravděpodobnosti pro různá N a výsledky porovnejte. Zformulujte závěr, který vyplývá pro skutečné, tj. obrovské soubory částic (řádově 10^{23}).

7. Hod míčky

Honza hodí svisle vzhůru míček a v okamžiku, kdy je míček v nejvyšším bodě, hodí za ním stejnou počáteční rychlostí druhý míček. Míčky se setkají ve výšce H = 5,4 m. Po dokonale pružném, středovém rázu se míčky pohybují dále po stejné přímce.

a) Do jaké největší výšky H_0 vystoupil první míček?

b) Jakou počáteční rychlostí v_0 byly míčky vrženy? Jaká byla rychlost míčků při jejich srážce?

c) Po jaké době t_1 a t_2 od vržení druhého míčku dopadnou míčky zpět do Honzovy ruky?

Odpor vzduchu a rozměry míčků zanedbejte. Tíhové zrychlení 9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.