Úlohy 1. kola 61. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

1. Železniční přejezd

Automobil se pohybuje rychlostí $v = 24\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V okamžiku, kdy se nachází ve vzdálenosti $s = 420\ \mathrm{m}$ před železničním přejezdem, začne blikat červené světlo. Chvilku pokračuje v jízdě stálou rychlostí, poté se pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti $a = 1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a zastaví těsně před přejezdem.

a) Vypočtěte číselně celkovou dobu t jízdy.

b) Celkovou dobu jízdy t vyjádřete obecně pomocí daných veličin s, v, a a ověřte dosazením číselný výsledek a).

c) Uvažujme variantu jízdy, kdy řidič začne brzdit v čase 2,0 s po aktivaci výstražného signálu a auto zpomaluje s poloviční velikostí zrychlení.

Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase pro obě varianty pohybu. Z grafu určete, zda i v druhé variantě zastaví před přejezdem.

2. Padající kapky

Turisté pozorovali kapky padající ze skalního převisu. Měřením času zjistili, že kapky padají vždy ve stejných časových intervalech. Dále naměřili, že doba pádu každé kapky je 2,1 s a že doba mezi uvolněním první a páté kapky je 3,4 s. Tíhové zrychlení je $9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Odpor vzduchu zanedbejte.

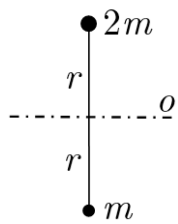
a) Sestrojte na časovém intervalu 0 s až 3 s graf závislosti rychlosti na čase pro první kapku uvolněnou v nulovém čase a pro všechny následující.

b) Z grafu určete minimální a maximální vzdálenost $d_{2\,\mathrm{min}}$ a $d_{2\,\mathrm{max}}$ mezi první a druhou kapkou během letu a minimální a maximální vzdálenost $d_{3\,\mathrm{min}}$ a $d_{3\,\mathrm{max}}$ mezi první a třetí kapkou během letu.

3. Rotace soustavy dvou kuliček

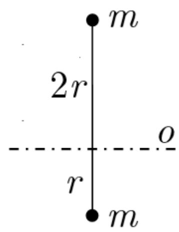
Soustava dvou malých kuliček umístěných na navzájem opačných koncích pevné tyčky zanedbatelné hmotnosti se může otáčet ve svislé rovině kolem vodorovné osy o procházející tyčkou.

a) Hmotnost jedné kuličky je m, hmotnost druhé $2m$. Poloměr trajektorie každé kuličky je r. Tyčku natočíme do svislé polohy s hmotnější kuličkou nahoře a nepatrným impulzem uvedeme do pohybu. Určete obecně maximální velikost v_m okamžité rychlosti každé kuličky. Určete obecně i číselně celkovou délku l tyčky, s níž dosáhneme hodnoty $v_\mathrm{m} = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 1

b) Hmotnost každé kuličky je m, poloměr otáčení jedné kuličky je r, poloměr otáčení druhé kuličky $2r$. Tyčku opět natočíme do svislé rovnovážné vratké polohy a nepatrným impulzem uvedeme do pohybu. Určete maximální úhlovou rychlost ω_m soustavy. Určete obecně i číselně celkovou délku l' tyčky, s níž dosáhneme hodnoty $\omega_\mathrm{m} = 7{,}5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.



Obr. 2

Tíhové zrychlení je 9,81 m · s^{-2}. Poloměr kuličky vždy považujte za zanedbatelný vzhledem k poloměru trajektorie.

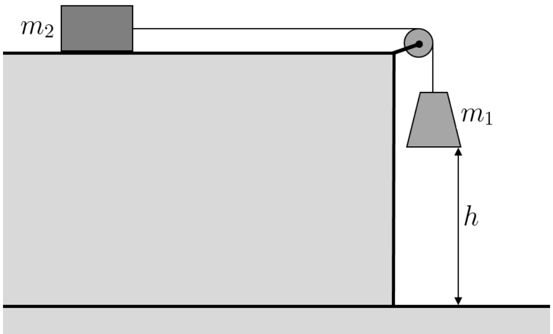
4. Kvádr a závaží

Na vodorovné desce stolu je kvádr o hmotnosti m_2. Ke kvádru je přivázáno lanko vedené vodorovně přes pevnou kladku a na druhém konci lanka visí závaží o hmotnosti m_1 ve výšce h nad podlahou. Po uvolnění se soustava uvede do pohybu. Doba pohybu závaží je t_1, následná doba pohybu kvádru je t_2.

a) Určete velikost v_{m} maximální rychlosti kvádru a součinitel f smykového tření.

b) Určete velikost zrychlení a_1 soustavy v první fázi pohybu a velikost zrychlení a_2 kvádru v druhé fázi pohybu.

c) Určete hmotnost m_2 kvádru.



Obr. 3

Tíhové zrychlení je 9,81 m · s^{-2}. Hmotnost kladky a hmotnost lanka zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_1 = 500$ g, $h = 0{,}35$ m, $t_1 = 0{,}50$ s, $t_2 = 0{,}70$ s.

5. Vlak

Na daném úseku trati se stálým sklonem vytáhne lokomotiva rovnoměrným pohybem tři stejné vagóny za čas $t_1 = 219$ s. Hmotnost lokomotivy je $m_0 = 73$ t, hmotnost každého vagónu $m_1 = 45$ t.

a) Určete počet N vagónů, které lokomotiva při stejném výkonu na stejném úseku vytáhne za čas $t_2 = 360$ s.

b) Určete výkon P lokomotivy, jestliže uvažovaný úsek tratě má délku $d = 4{,}00$ km při stoupání 2,4 % a valivý odpor každého kolejového vozidla tvoří 0,2 % jeho tíhové síly.

c) Na horním konci uvažovaného traťového úseku je zabrzděný vagón. Po odbrzdění začíná sjíždět po trati dolů. Jakou velikost rychlosti v získá na dráze d a za jakou dobu t_0?

6. Praktická úloha: Nedokonale pružný ráz mincí

Při nedokonale pružné srážce dvou těles se část mechanické energie přemění na vnitřní energii, přitom se tělesa od sebe odrazí. Pohybuje-li se těleso o hmotnosti m_1 rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ a narazí-li do tělesa o hmotnosti m_2 v klidu, změní se rychlost prvního tělesa na $\boldsymbol{u}_1$ a druhé získá rychlost $\boldsymbol{u}_2$.

Obr. 4

Uvažujme přímý středový ráz, to znamená, že veškerý pohyb těžišť těles se děje v jedné přímce. Označme v_1, u_1, u_2 v souladu se studijním textem x-ové souřadnice rychlostí $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, což lze zapsat $\boldsymbol{v}_1\,(v_1)$, $\boldsymbol{u}_1\,(u_1)$, $\boldsymbol{u}_2\,(u_2)$. Osu x volíme ve směru rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.

Srážka je charakterizována koeficientem restituce (vzpruživosti), který je definován jako poměr velikostí vzájemných rychlostí těles po srážce a před srážkou:

$$k = \frac{|u_2 - u_1|}{v_1} = \frac{u_2 - u_1}{v_1}.$$

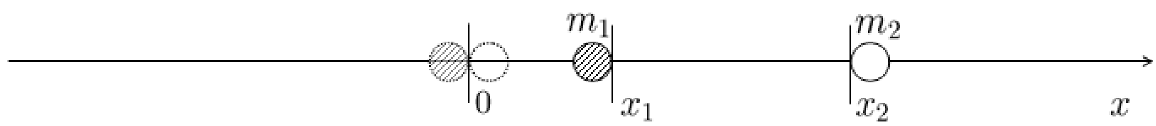
Ve studijním textu jsou na straně 23 uvedeny rovnice (21) a (22), které určují souřadnice rychlosti každého tělesa po přímém středovém rázu. V našem případě je na počátku druhé těleso v klidu, proto v nich položíme $v_2 = 0$:

$$u_1 = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}v_1, \quad u_2 = \frac{(1+k)\,m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

Podělením rovnic dostaneme $\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{m_1 - km_2}{(1+k)\,m_1}$, z rovnice vyjádříme k:

$$k = \frac{m_1\,(u_2 - u_1)}{m_1 u_1 + m_2 u_2}.$$

Provedení úlohy: Proměříme vzájemnou srážku mincí na stole při přímém středovém rázu. Do zvoleného počátku umístíme minci o hmotnosti m_2 a minci o hmotnosti m_1 uvedeme do pohybu tak, aby do ní narazila a aby se zachoval pohyb mincí po téže přímce (je třeba provést více pokusů, aby se tato podmínka přibližně splnila). Vlivem třecí síly obě mince zastaví a zaujmou polohy o souřadnicích x_1 a x_2.



Obr. 5

Místo rychlostí budeme měřit brzdné dráhy. Z kinematických rovnic rovnoměrně zpomaleného pohybu s počáteční rychlostí v_0 do zastavení na dráze s plyne $v_0 = \sqrt{2as}$. Je nutné použít mince ze stejného materiálu, aby byl zachován stejný součinitel smykového tření, a tím stejné brzdné zrychlení. Předchozí vzorec pro koeficient restituce pak lze přepsat do tvaru

$$k = \frac{m_1\left(\sqrt{2as_2} \mp \sqrt{2as_1}\right)}{m_2\sqrt{2as_2} \pm m_1\sqrt{2as_1}} = \frac{m_1\left(\sqrt{s_2} \mp \sqrt{s_1}\right)}{m_2\sqrt{s_2} \pm m_1\sqrt{s_1}},$$

kde horní znaménko platí pro nezměněný směr pohybu ($u_1>0$) a dolní znaménko pro opačný směr pohybu ($u_1<0$).

Měření provedeme pro dva typy materiálů mincí, v první variantě pro materiál mincí 10 Kč a 50 Kč (ocel plátovaná a galvanicky pokovená mědí) a v druhé variantě pro materiál mincí 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč (ocel galvanicky pokovená niklem).

Popsaný přímý středový ráz se lépe provádí s mincemi s větším rozdílem hmotností a s volbou méně hmotné mince v klidu. Proto v první variantě měření použijeme jednu samostatnou minci v hodnotě 10 Kč a „složenou minci“ ze dvou s hodnotami 50 Kč a 10 Kč, které položíme na sebe a slepíme lepidlem na papír. Dosáhneme tak poměru hmotností významněji odlišného od jedničky. Obdobně v druhé variantě měření použijeme jednu samotnou minci v hodnotě 1 Kč a „složenou minci“ ze dvou s hodnotami 5 Kč a 1 Kč.

Při této kombinaci hmotností mincí ($m_1 > m_2$) nemůže dojít k odrazu mince do protisměru, proto se výsledný vzorec zjednoduší na tvar

$$k = \frac{m_1\left(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}\right)}{m_2\sqrt{s_2} + m_1\sqrt{s_1}} = \frac{m_1\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)}{m_2\sqrt{x_2} + m_1\sqrt{x_1}}.$$

Měření provedeme na čistém archu papíru, na který narýsujeme osu x a zvolíme počátek. Je vhodné přikreslit obrys druhé mince v počáteční klidové poloze, kam tuto minci budeme pokládat. První minci uvedeme rukou do pohybu. Pokud se směry pohybů mincí příliš neodchýlí od narýsované přímky, zaznamenáme tužkou konečné polohy mincí a změříme souřadnice.

Hmotnosti mincí zjistíme vážením, případně najdeme na internetu. Pro každou kombinaci mincí provedeme 10 měření. Výsledky zapíšeme do tabulky (výpočty pro větší náročnost je vhodné provést v Excelu):

Druh mincí: (50 + 10) Kč a 10 Kč. $m_1 =$ $m_2 =$

Číslo měření	$\frac{x_1}{\text{mm}}$	$\frac{x_2}{\text{mm}}$	k
1			
⋮			

Stejné měření provedeme i pro jiný druh mincí: (5 + 1) Kč a 1 Kč. Z naměřených hodnot určíme v každé variantě střední hodnotu, průměrnou a relativní odchylku a vzájemně porovnáme. Zformulujeme závěr.

7. Srážka vozíků

Dva vozíky o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují po vodorovných kolejničkách proti sobě rychlostmi $\boldsymbol{v}$ a $-\boldsymbol{v}$. Na srážkových koncích vozíků jsou umístěny magnety tak, že při vzájemném přiblížení působí na sebe odpudivou silou. Tím lze srážku považovat za dokonale pružnou.

a) Určete obecně rychlosti $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ vozíků po srážce.

b) Jaké rychlosti budou mít vozíky po srážce, jestliže $m_2 = 4m_1$?

c) Jaké rychlosti budou mít vozíky po srážce, jsou-li jejich hmotnosti stejné?

d) Srážkou se jeden vozík zastaví. Jakou podmínku musí splňovat hmotnosti vozíků a jakou rychlost po srážce bude mít druhý vozík?