

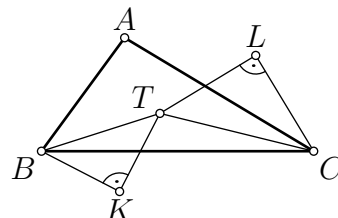
Zadání úloh domácí části I. kola

Kategorie A

1. Na párty se sešlo 20 osob, z toho 10 chlapců a 10 dívek. Každému se líbí právě k osob opačného pohlaví. Je vždy možné vytvořit pár, v němž se oběma líbí ten druhý? Řešte
a) pro $k = 5$, b) pro $k = 6$. (Josef Tkadlec)

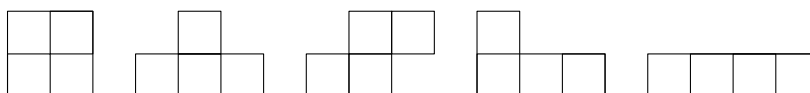
2. Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda lze takto získat posloupnost
a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22,
b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23. (Patrik Bak)

3. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T . Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL stejně jako na obrázku. Označme D střed strany BC a E střed úsečky KL . Určete všechny možné hodnoty poměru $|AT|/|DE|$. (Michal Rolínek)



4. O lichém prvočísle p řekneme, že je *speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p . Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální? (Jaroslav Zhouf)

5. Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina políček tabulky 7×7 s následujícími vlastnostmi: Pro každé z tetramin



lze tuto podmnožinu vyplnit bez překrývání výhradně jeho kopiemi. Jednotlivé kopie můžeme libovolně otáčet a překlápět. (Michal Rolínek)

6. Pro reálná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ platí $(a + c)(b + d) = 8$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1} \geq 1,$$

a určete, kdy nastane rovnost.

(Zdeněk Pezlar)



Kategorie B

1. Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$ má součet prvků dělitelný třemi?
(Eliška Macáková)

2. Pro reálná čísla a, b, c platí

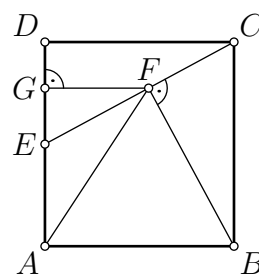
$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3}.$$

(Michal Rolínek)

3. Necht E je střed strany AD pravoúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že pata F kolmice z vrcholu B k přímce CE leží uvnitř úsečky CE a označme G patu kolmice z bodu F ke straně AD . Dokažte, že přímka CE půlí úhel AFG . (Jaroslav Švrček)



4. Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel

(i) a, a, a, a, b ($a \neq b$),

(ii) a, a, b, b, c ($a \neq b \neq c \neq a$),

v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.

(Jaroslav Zhouf)

5. V pravoúhlém trojúhelníku je poměr poloměru kružnice vepsané ku poloměru kružnice opsané $2 : 5$. Dokažte, že délka jedné z jeho stran je aritmetickým průměrem délek zbylých dvou stran.
(Mária Dományová)

6. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 4×4 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 16 tak, že v každém řádku i každém sloupci existuje číslo, jehož sedminásobek je součtem zbylých tří čísel.
(Jaromír Šimša)



Do soutěže se přihlaste na osmo.matematickaolympiada.cz

Informace o soutěži najdete na matematickaolympiada.cz



Kategorie C

- Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9? *(Jaroslav Zhouf)*
- Pro střed M přepony AC pravoúhlého trojúhelníku ABC platí $|BC| = |CM|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ABM mají stejné poloměry. *(Michal Pecho)*
- Uvažujme 20 výroků:

„Mám právě jednu sestru.“	„Mám právě jednoho bratra.“
„Mám právě dvě sestry.“	„Mám právě dva bratry.“
⋮	
„Mám právě deset sester.“	„Mám právě deset bratrů.“

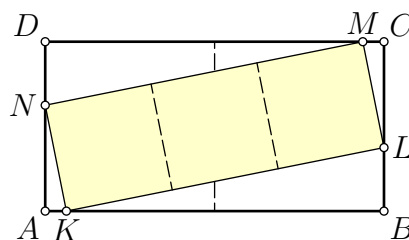
 - Každý ze čtyř sourozenců pronesl jiný z těchto 20 výroků. Je možné, že všichni čtyři měli pravdu?
 - Najděte největší přirozené číslo n takové, že každý z n sourozenců může pronést jiný z těchto 20 výroků a mít pravdu.* *(Josef Tkadlec)*
- Kolik uspořádaných čtveřic přirozených čísel (a, b, c, d) se součtem 100 splňuje rovnice

$$(a + b)(c + d) = (b + c)(a + d) = (a + c)(b + d)?$$

(Patrik Bak)

- Na tabuli jsou napsána čísla 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. V každém kroku čísla a , b , c napsaná na tabuli smažeme a nahradíme je součiny ab , bc , ca . Zjistěte, zda po několika krocích bude znovu některé z čísel napsaných na tabuli přirozené. *(Jaroslav Zhouf)*
- Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB , BC , CD , DA jsou dány po řadě body K , L , M , N tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočtěte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$.

(Josef Tkadlec)



* Všichni sourozenci mají stejné rodiče.

