Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je zvláštním případem posloupnosti, která se vyznačuje stálým rozdílem mezi libovolnými dvěma sousedními členy. Tento stálý rozdíl se nazývá **diference**, značí se písmenem $\boldsymbol{d}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, právě když existuje takové číslo d, že pro každé přirozené číslo n platí $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$. Číslo d se nazývá diference posloupnosti.

Pro diferenci platí: $\boldsymbol{d = a_{n+1} - a_n}$

Př. 1: Rozhodněte, zda následující posloupnosti jsou aritmetické. Pokud ano, určete diferenci.

a) $\left(\frac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $(7)_{n=1}^{\infty}$

d) $(1-n)_{n=1}^{\infty}$

Vzorec pro *n*-tý člen

Často u posloupností známe první člen a_1 a zajímáme se o členy, které jsou například až na 150. místě. V takových případech bychom postupným dosazováním strávili příliš mnoho času. Zkusme najít způsob, jak počítání urychlit:

$$
\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 + 1d\\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d\\
&a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\\
&a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d\\
&a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d\\
&\vdots\\
&a_n = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro každé $n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Vzorec *s*-tého členu z *r*-tého

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu a_1 známe hodnotu jiného. Tento známý člen může našemu hledanému předcházet nebo i následovat. Pro tyto případy se používá vzorec, který je velmi podobný vzorci uvedenému výše.

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{a_s = a_r + (s - r)d}$$

Pozn. Pokud bychom položili $s = n, r = 1$, pak obdržíme $a_n = a_1 + (n-1)d$, což je náš původní vzorec. Není tedy nutné si zapamatovat oba dva, stačí znát pouze druhý a vědět, co který symbol značí.

Př. 2: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_4 = 6, a_{11} = 34$.
Určete d, a_1 a a_8.

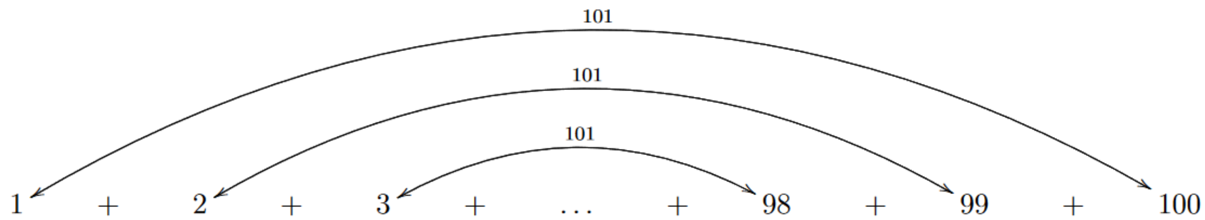
Součet prvních *n* členů

Se vzorcem určující výsledek je spjat příběh, který se traduje dodnes.

Myslete jako Gauss

Když bylo malému chlapci se jménem Friedrich Gauss devět let, navštěvoval obecnou školu stejně, jako mnoho dalších dětí. Jednoho dne se stalo, že chtěl mít jejich učitel celou hodinu klid a tak svým žákům zadal úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100.
Údajně malý Gauss během pár okamžiků vstal a odevzdal břidlicovou tabulku na učitelův stůl. Na tabulce se nenacházely žádné výpočty, bylo zde jen velkými číslicemi napsáno 5050. Což byl správný výsledek!
Znal snad malý Gauss výsledek zpaměti? Jak na to tak rychle přišel?
Na to malý Gauss svému učiteli s naprostou samozřejmostí vysvětluje, že výsledek součtu čísel od 1 do 100 se dá vypočítat zpaměti a to ihned!

Není nutné všechna čísla sčítat jedno po druhém. On si sečetl první číslo s posledním, poté druhé s předposledním atd. Výsledkem bylo vždy číslo 101. A protože se zde nachází přesně 50 takových dvojic (součtů), vynásobil číslo 101 padesáti. Tak získal správný výsledek 5050.



Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ platí: $\boldsymbol{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

Př. 3: Určete součet:

a) všech jednociferných přirozených čísel,
b) všech dvouciferných sudých čísel,
c) všech trojciferných násobků čísla 7.

Př. 4: Určete součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti, víte-li, že $a_5 = -6{,}5;\ a_8 = -12{,}5$.

Př. 5: Přirozená čísla dělitelná 4 tvoří aritmetickou posloupnost. Určete součet těchto čísel, která leží mezi čísly 7 a 97.

Př. 6: Aritmetická posloupnost obsahuje 50 členů, z nichž první tři jsou $-140; -132; -124$ a poslední tři $236; 244; 252$.

a) Vypočtěte dvacátý člen posloupnosti.
b) Vypočtěte součet všech 50 členů posloupnosti.
c) Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 100.