Posloupnosti

1) Napište pomocí vzorce pro n-tý člen:
   a) posloupnost všech přirozených násobků sedmi;
   b) posloupnost všech přirozených sudých čísel
   c) posloupnost všech přirozených lichých čísel;
   d) posloupnost všech přirozených čísel, které po dělení třemi dávají zbytek dva.

2) K výpisům následujících nekonečných posloupností napište další tři členy a pak je zapište pomocí vzorce pro n-tý člen:
   a) $1, -1, 1, -1, 1,$ ...
   b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, ...
   c) $25, 5, 1, \frac{1}{5}$, ...

3) Najděte vzorec pro n-tý člen u posloupnosti, která je rekurentně dána takto:

$$a_1 = 15;\ a_{n+1} = a_n - 3;\ n \in \mathbb{N}$$

4) Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí nebo klesající, dokažte:
   a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vzorové řešení:

členy posloupnosti jsou: $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$, ... $\Longrightarrow$ *zřejmě klesající posloupnost*

musíme dokázat: $\forall n \in \mathbb{N}\ \ plat\acute{\imath}\ \ a_n > a_{n+1}$

$$a_n = \frac{n+1}{n}, \qquad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \quad /.\, n(n+1)$$

n je přirozené číslo, tj. násobíme kladnými čísly ⇒ *nerovnost se nemění*

$$(n+1)^2 > n(n+2)$$

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$$

$1 > 0$ *platí vždy* ⇒ *platí pro všechna přirozená čísla* ⇒ *posloupnost je klesající*

   b) $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$
   c) $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **shora omezená**, právě když existuje reálné číslo h takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq h$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq d$.

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**, jestliže je <u>omezená shora i zdola</u>.

<u>Příklad</u>: Uvažujme posloupnost $\left(\frac{4-3n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

prvních několik členů: $1, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{9}, -\frac{1}{2}, -\frac{11}{25}, -\frac{7}{18}, -\frac{17}{49}, -\frac{5}{16}, -\frac{23}{81}, -\frac{13}{50}, \dots$

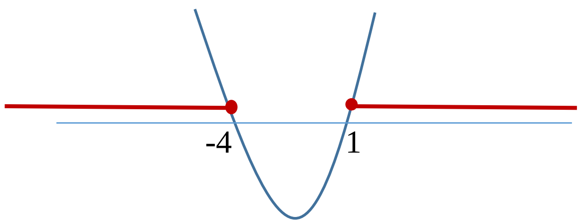
- volíme číslo h a dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq h$:

$$\frac{4-3n}{n^2} \leq 1$$

$$4 - 3n \leq n^2$$

$$0 \leq n^2 + 3n - 4$$

$$0 \leq (n+4)(n-1)$$



nerovnost je pravdivá pro všechna $n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad$ posloupnost je shora omezená

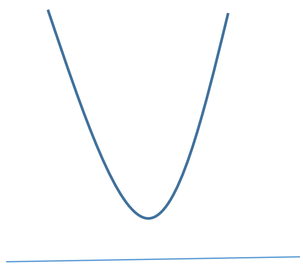
- volíme číslo d a dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq d$:

$$\frac{4-3n}{n^2} \geq -1$$

$$4 - 3n \geq -n^2$$

$$n^2 - 3n + 4 \geq 0$$

$$D = 9 - 16 = -7$$



nerovnost je pravdivá pro všechna $n \quad \Rightarrow$ posloupnost je zdola omezená

Je zřejmé, že jakmile dostaneme nějakou horní či dolní mez, najdeme i mnoho dalších. V našem příkladu jsme použili -1 a 1, ale mohli jsme použít například -3 a 5.

$\Rightarrow$ **posloupnost je omezená**

5) Zjistěte, které z následujících posloupností jsou shora omezené, zdola omezené a které jsou omezené:

a) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left([-1]^n\, n^2\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left([-1]^n\, \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$